**第1章 沙粒和星星**

1.古希腊的计数系统（位值制计数法尚未出现，因此不会在不同位置使用同一个字母）

M=10000 ——古希腊人称之为myrious,古罗马人称之为myriad

2.阿基米德发明的描述大数新方法

“第myraid myraid周期”结束的数=10^80000000000000000

宇宙沙粒数=8×10^63

3.大乘佛教经典《方广大庄严经》

随入极微尘波罗摩呶罗阇=10^421

不可说=10^(10×2^122)

4.实际应用中，用以“-illion”结尾的词命名大数。起源于中世纪晚期，法国人许凯提出将其系统化

million（百万）、billion（十亿）……

centillion=10^303

5.美国数学家卡斯纳的9岁外甥能想到的大数及其命名，后被广泛传播并成为Google之名的出典

古戈尔(googol)=10^100

古戈尔普勒克斯(googolplex)=10^古戈尔

**第2章 现实的极限**

1.管理大数的方法：科学计数法、使用大单位（光年、秒差距……）

2.科学中有意义的大数

阿伏伽德罗常数=6.02×10^23

爱丁顿数（推测的宇宙中的质子数量）=1.57×10^79=136×2^256

质子和电子之间的电作用力与引力之比=10^40

大脑中的神经元数=860亿

大脑中的神经元连接总数≈100万亿

3.现实生活中出现的大数

有史以来最高的通货膨胀率（二战后匈牙利）=4190亿亿%

2023年的世界首富埃隆·马斯克的财富=2400亿美元

4.与物理现实相关的最大的数

可观测宇宙能容纳的质子数=10^122

可观测宇宙能容纳的普朗克长度球体数=10^185

5.现实世界中计算的极限

布雷默曼极限：任何孤立的物质系统能处理数据的最大速率

c^2/h=1.36×10^50比特/（秒·千克）

贝肯斯坦上限：在给定体积的空间内可以包含的最大信息量

6.有史以来由科学家（非数学家）计算并发表在学术期刊上的最大的数

庞加莱重现时间=10^10^10^10^10^1.1 年

**第3章 数学无界**

1.棋盘麦粒问题

2.素数问题

梅森素数的概念、梅森素数与完全数一一对应（未证明）

截至2021年发现最大的素数=2^82589933-1

高斯素数定理

高斯素数定理给出的估计值首次低于实际值的n值

一度是数学中有明确用途的最大的数

第一斯奎斯数=10^10^10^34

第二斯奎斯数=10^10^10^964

3.由组合与概率产生的大数

一副普通扑克牌的排列数=52！=8.0658×10^67

各种棋类运动的博弈树复杂性

国际象棋棋局数（香农数）≈10^120

井字棋棋局数=255168

四子棋棋局数=1.1×10^20

西洋双陆棋棋局数≈10^144

围棋棋位数≈10^172 围棋棋局数≈10^360

猴子与打字机问题

打出《哈姆雷特》的概率=1/(4.4×10^360783)

博尔赫斯《巴别图书馆》

4. 幂运算的下一级运算

四次迭代 ——英国数学家古德斯坦

超幂运算 ——美国布林莫尔学院的布罗默

斯奎斯数、古戈尔普勒克斯、庞加莱重现时间称为迭代指数（非四次迭代）

各指数都不同则称为嵌套指数

5.五次迭代、六次迭代……超运算序列

6.从兰贝特的W-函数到欧拉的幂塔函数

x的无限次指数塔

**第4章 向高处，向远处**

1.表示超运算序列的三种等价的符号系统（最常用的是高德纳向上箭头表示法）

2.斯坦豪斯-莫泽表示法

三角形内写有数n,表示n^n

正方形内的数n表示n个三角形内的数n

圆形内的数n表示n个正方形内的数n

②=正方形内的256=兆

10↑↑257<兆< 10↑↑258

⑩=Megiston数

10↑↑↑11<⑩< 10↑↑↑12

莫泽进行了推广

k+1边形内的数n表示n个k边形内的数n（圆形改为五边形）

莫泽数=写在兆边形内的数

2[兆]3<莫泽数<2[兆]4

斯坦豪斯-莫泽法是最早被设计出来将我们代入与快速增长层级同一领域的系统之一

**第5章 一掠而过的g数**

1.判定问题

由德国数学家希尔伯特和阿克曼提出

是否总存在一种逐步的方法，来判定某个给定的命题能否通过逻辑规则，从基本的起始假设或公理出发得到证明

2.拉姆齐定理

原始形式为图论问题，专门针对着色完全图

最简单的例子是朋友和陌生人定理

人际关系只有朋友和陌生人两种，6个人中一定存在3个人，两两都是朋友或都是陌生人

3.葛立恒-罗斯柴尔德研究的几何拉姆齐问题

将n维超立方体的每一对顶点相连，每条边涂成红色或蓝色。当n足够大时，在所有可能的着色方式中，都存在有4个共面顶点的完全子图为同色

n的上界的简化形式即为葛立恒数

4.孪生素数猜想

张益唐证明，存在无穷多相差至多为7000万的素数对

5.葛立恒数

高德纳向上箭头表示法已不能直接表示葛立恒数

**第6章 康威链**

3→3→64→2<葛立恒数< 3→3→65→2

5→4→3→3远大于葛立恒数

**第7章 阿克曼和递归的力量**

1.可计算函数

可以用算法或一系列精确指令的形式来表示的函数

2.原始递归函数

可以通过运行程序来计算的函数，并且在这个程序中，唯一的循环是计数控制循环

3.阿克曼函数和苏丹函数

提出的目的是证明存在非原始递归的可计算函数

因为用有限的for循环无法表示完整的阿克曼-苏丹函数

4.阿克曼函数和苏丹函数是其他大数生成方法的鼻祖

**第8章 如果可以的话，算一算！**

1.停机问题（邱奇-图灵论题）

是否有一种通用算法，可以判定通用图灵机在任意输入下，运行是否会停止

已证明判定问题不存在通解

2.康威的《生命游戏》

无限二维、每个网格有两种可能状态的元胞自动机

规则：在每一步中，考察相邻8个细胞，活邻居为2或3个的活细胞存活，活邻居不为2或3个的活细胞死亡，活邻居为3个的死细胞复活

基本模式：不动的“方块”、纵横交替的“眨眼”、每4轮沿对角线移动一个方格的“滑翔机”

高斯帕滑翔机枪：可以无限地周期性喷出滑翔机

高斯帕滑翔机枪及相关配置可用于模拟计算机逻辑门，因此《生命游戏》等价于通用图灵机，因为停机问题不存在通解，所以不可能写一个程序预测《生命游戏》中所有生命模式的最终命运

3.通过限制程序的能力以确保程序终止

确保没有循环：过于苛刻

只允许有for循环：原始递归函数，无法计算诸如葛立恒数

**第9章 无穷之事**

1.数学史上对潜无穷和实无穷的看法

2.无穷的不同算数性质

希尔伯特旅馆

3.接受实无穷是一个数学对象的尝试——集合论

无限集的等势

自然数集的元素个数称为阿列夫零

阿列夫零是最小的超限数（大于任何有限数的数），又称为可数无穷基数

4.基数与序数

有限集的基数与序数几乎无差异，但无限集的基数与序数是完全不同的概念

良序集：每个子集都有第一成员的集合

大小（势）相等的良序无限集可以有不同的长度（术语为“序数”）

最小的无穷序数——自然数集的最短长度称为ω

集合{0,1,2,4,…,3}的序数为 ω+1

集合{0,2,4,…,1,3,5…}的序数为 ω+ω 或 ω × 2

ε0是位于任何对ω进行加、乘和幂运算所得到的序数之外的最小序数

费弗曼-舒特序数、大小维布伦序数、巴赫曼-霍华德序数、邱奇-克莱尼序数……

以上无限序数都是可数的，即都对应于基数阿列夫零

4.阿列夫一

阿列夫一定义为可数序数集的大小

5.连续统假设

阿列夫一是实数集的大小

没有一个无限集的势介于自然数集的势和实数集的势之间

1930s,奥地利逻辑学家哥德尔证明，从集合论的标准公理或假设出发，不可能证明连续统假设是错的

1960s,美国数学家科恩证明， 从集合论的标准公理或假设出发，不可能证明连续统假设是对的

连续统假设是哥德尔不完备性定理（存在无法通过公理系统判定的问题）的第一个具体实例

**第10章 快速增长**

1.快速增长层级

索引序数（f的下标）为k的函数对应k-1个向上箭头的大数级别

2.超限序数的数学

后继序数：比前面某个序数大1

极限序数：一列序数的非零极限，序列中的所有序数都比它小，且它本身不是后继序数

因此每个序数要么是0，要么是后继序数，要么是极限序数

ω是最小的极限序数，因此不存在ω-1

每个极限序数都有基本序列，例如：

ω 的基本序列是 0,1,2,3,…

ω×2 的基本序列是 ω, ω+1, ω+2, ω+3, …

ω^2 的基本序列是 ω, ω×2, ω×3, …

3.在快速增长层级中引入无穷序数

4.快速增长层级有不同的变体

取决于不同的初始函数和极限序数的基本序列

但所有的快速增长层级都是由序数标记的快速增长函数序列

最早的例子是1904年的哈代层级，是第一次使用超限序数来标记递归函数

5.树函数

数学中的树是图的一种特殊变体，联通且无圈的图称为树

如果给每个节点分配唯一的数或颜色，则称为有标记的树

指定一个节点作为根，则称为有根数

1960年，美国数学家和统计学家克鲁斯卡尔证明：一个树的序列，第n棵树最多有n个节点，且没有一棵树可以同胚嵌入到后面任何树中，这样的序列长度是有限的

TREE(n)=有n种颜色时，上述序列的最大长度

TREE(1)=1 TREE(2)=3

TREE(3)远大于葛立恒数

需要2↑↑1000个符号可以证明TREE(3)是有限的

TREE(n)的增长速度下界是小维布伦序数所在的快速增长层级

**第11章 不要计算！**

1.忙碌海狸数

1962年，由匈牙利数学家拉多提出

忙碌海狸数：一台有n个状态的图灵机在停机前能能在纸带上写下1的最大数目，记为 **∑**(n)

忙碌海狸步数：停机前运行的最大步数，记为BB(n)

忙碌海狸数只能通过检查所有可能的n状态图灵机获得，但从五状态开始，部分图灵机停止前的步数极大，无法完成检验

**∑** (1)=1, **∑** (2)=4 **∑** (3)=6 **∑** (4)=13

**∑** (5)≥4098 **∑** (5)>3.52×10^18267 **∑** (6)>10^10^10^10^18705243

2.不可计算函数

不可能写下一个有限的良定指令序列来计算函数在任何给定输入时的值

忙碌海狸函数是不可计算函数，所以其增长趋势超越一切可计算序列

3.忙碌海狸函数的作用

可以衡量一些重要的、长期存在的问题的解决难度

例如，找到了一个有27状态的图灵机程序，当且仅当哥德巴赫猜想为假时会停止。通过让该程序运行BB(27)步即可自动解决哥德巴赫猜想

4.推广

有m个符号的n状态忙碌海狸函数

**第12章 大数数学家的奇异世界**

创造大数的原则、抵制沙拉数

科拉茨猜想也与忙碌海狸函数密切相关

拉约数，诞生自2007年麻省理工学院的大数决斗

**第13章 超越之桥**

1.有限主义

康托尔因敢于将实无穷引入数学而受到攻击。集合论建立完善后，产生了被称为有限主义的对立哲学，反对“所有自然数的集合”这一概念

有限主义分为经典有限主义（乐于接受潜无穷的概念）、严格有限主义（怀疑潜无穷的概念）和超有限主义（相信物理宇宙就是存在的一切，不存在居住着纯粹数学实体的柏拉图式的地方）

2.iota函数

由英国青年数学家霍洛姆提出（非严格定义，仅为思想实验），高度以物理为导向，以人类为中心

表示物理宇宙中可能被实例化的最大的数

含义为从公元前1年开始，直到n个普朗克时间之后，使用其间被定义的所有函数（有精确判定标准）可以产生的最大可能的数。其中也包含之前时刻的iota函数

iota函数不可计算，但值是确定的

3.有限陈述和无穷陈述

有限陈述是可以不借助无穷这一概念而证明的陈述，而无穷陈述则基于“无穷大的对象存在”这一假设

希尔伯特纲领的一个重要部分是为所有与无穷有关的陈述提供有限的证明和理由，这一期望已被哥德尔不完备性定理打破

4.拉姆齐二染色定理

2016年由日本数学家横山启太和法国计算机科学家帕泰证明

在主要逻辑系统的层级中位于第二级（有限）和第三级（无穷）之间

被认为是已知有限可约且涉及无穷的最复杂的命题

**第14章 最大的数**

1.洛德数

洛德在2001年大数烘焙比赛中用C语言程序给出

D(n)表示结构演算中有多少表达式可以在大约log(n)个推理步骤内得到证明

洛德数=D(D(D(D(D(99))))

洛德数是有史以来定义的最大的可计算数之一，是有限终止算法的结果，即理论上可以以任何精度为我们所知

2.给大数排名的困难

一旦超出葛立恒数的领域，我们就需要依靠粗略估计函数的增长率来帮助确定它们产生的数的相对大小。在确定了某个函数的近似增长率后，就有可能找到最小的特定输入，使函数输出的量级明显不同于竞争对手输出的量级。例如TREE(3)和SGC(13)

3.拉约数

被一致认为是有史以来最大的有限数（之一）

定义的简化版本：在一阶集合论的语言中，比包含不超过1古戈尔的符号的表达式可以命名的有限正整数都大的最小正整数

4.绝对无穷

超越所有其他无穷的无穷，数学上无法严格定理，可能被认为是1除以0的最合理的结果

https://book.douban.com/review/15840508/